Vector algebra – Problems (1)

1. show that

(i) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$

L.H.S. $= \{\vec{a}\cdot\vec{c}\,\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{b}\,\vec{c}\} + \{\vec{b}\cdot\vec{a}\,\vec{c} - \vec{b}\cdot\vec{c}\,\vec{a}\} + \{\vec{c}\cdot\vec{b}\,\vec{a} - \vec{c}\cdot\vec{a}\,\vec{b}\}$

$= (\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} + (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a} + (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a} - (\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$

$= 0$

$=$ R.H.S.

(ii) $[\vec{a}+\vec{b} \quad \vec{b}+\vec{c} \quad \vec{c}+\vec{a}] = 2[\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}]$

L.H.S. $= (\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{b}+\vec{c}) \times (\vec{c}+\vec{a})$

$= (\vec{a}+\vec{b}) \cdot \{\vec{b}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{a} + \vec{c}\times\vec{c} + \vec{c}\times\vec{a}\}$

$= (\vec{a}+\vec{b}) \cdot \{\vec{b}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{a} + \vec{c}\times\vec{a}\}$

$= \vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c} + \vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{c}\times\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b}\times\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{b}\times\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{c}\times\vec{a}$

$= [\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}] + 0 + 0 + 0 + 0 + [\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}]$

$= 2[\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}]$

$=$ R.H.S.

(iii) $\vec{i} \times (\vec{a} \times \vec{i}) + \vec{j} \times (\vec{a} \times \vec{j}) + \vec{k} \times (\vec{a} \times \vec{k}) = 2a$

L.H.S. $= (\vec{i}.\vec{i}\,\vec{a} - \vec{i}.\vec{a}\,\vec{i}) + (\vec{j}.\vec{j}\,\vec{a} - \vec{j}.\vec{a}\,\vec{j})$
$+ (\vec{k}.\vec{k}\,\vec{a} - \vec{k}.\vec{a}\,\vec{k})$

$= \vec{a} + \vec{a} + \vec{a} - \{\vec{i}.\vec{a}\,\vec{i} + \vec{j}.\vec{a}\,\vec{j} + \vec{k}.\vec{a}\,\vec{k}\}$ —— (1)

Let $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ —— (2)

Taking dot with $\vec{i}$ we get

$\vec{i}.\vec{a} = x\,\vec{i}.\vec{i} + y\,\vec{i}.\vec{j} + z\,\vec{i}.\vec{k}$

$= x + 0 + 0$

$\therefore x = \vec{i}.\vec{a}$

similarly $y = \vec{j}.\vec{a}$, $z = \vec{k}.\vec{a}$

$\therefore$ (2) becomes $\vec{a} = \vec{i}\,\vec{a}\,\vec{i} + \vec{j}.\vec{a}.\vec{j} + \vec{k}\,\vec{a}\,\vec{k}$

$\therefore$ From (1)

L.H.S. $= 3\vec{a} - \vec{a}$

$= 2\vec{a}$

$=$ R.H.S.

(iv) $(\vec{a} \times \vec{b}).(\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{a}.\vec{b})(\vec{a}.\vec{c}) = (\vec{a}.\vec{a})(\vec{b}.\vec{c})$

L.H.S. $= \begin{vmatrix} \vec{a}.\vec{a} & \vec{a}.\vec{c} \\ \vec{b}.\vec{a} & \vec{b}.\vec{c} \end{vmatrix} + (\vec{a}.\vec{b})(\vec{a}.\vec{c})$

$= \{(\vec{a}.\vec{a})(\vec{b}.\vec{c}) - (\vec{a}.\vec{c})(\vec{b}.\vec{a})\} + (\vec{a}.\vec{c})(\vec{a}.\vec{b})$

$= (\vec{a}.\vec{a})(\vec{b}.\vec{c})$

$=$ R.H.S.